ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157
УДК 517.929.7

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© **М. Ж. Алвеш**[1], **С. М. Лабовский**[2]

[1] Университет им. Эдуардо Мондлане
CP 257, Мозамбик, г. Мапуто, Площадь 25 июня, 257
E-mail: mjalves.moz@gmail.com
[2] ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»
117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36
E-mail: labovski@gmail.com

Аннотация. Получены условия базисности системы собственных функций для функционально-дифференциального оператора четного порядка при специальных краевых условиях. Установлена эквивалентность ряда классических утверждений, в том числе утверждения типа Валле-Пуссена, а также положительности соответствующего квадратичного функционала.
Ключевые слова: квадратичный функционал; теорема Валле-Пуссена; функционально-дифференциальный оператор; спектр

1. Задача и обозначения

Рассматривается задача $\mathcal{L}u = f$ при краевых условиях

$$u^{(k)}(0) = 0, \ k = 0, \dots, m-1, \tag{1}$$

$$u^{(k)}(l) = 0, \ k = m, \dots, 2m-1, \tag{2}$$

где функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ определяется равенством

$$\mathcal{L}u(x) := (-1)^m u^{(2m)} - \int_0^l u(s) r(x, ds), \ x \in I := [0, l], \tag{3}$$

($m \geq 1$), $f \in L_2(0, l)$, $L_2(0, l)$ – множество функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на $[0, l]$.

Задача является частным случаем задачи, рассмотренной в [1]. Она может быть получена вариационным способом из квадратичного функционала $\langle u, u \rangle$, билинейный функционал определяется равенством

$$\langle u, v \rangle := \int_0^l u^{(m)} v^{(m)} \, dx - \int_{I \times I} u(s) v(x) \, d\xi. \tag{4}$$

Интеграл в (3) – интеграл Стилтьеса, вместо $r(x,ds)$ может быть написано $d_s r(x,s)$. Функция $r(x,\cdot)$ может рассматриваться как обычная неубывающая или же как мера. Отметим, что в частном случае (дискретная мера) получим уравнение с отклоняющимся аргументом, если

$$\int_0^l u(s)r(x,ds) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)u(h_i(x)).$$

Предполагаем, что $r(x,\cdot)$ при почти всех $x \in I$ не убывает на I, для любого $s \in I$ функция $r(\cdot,s)$ интегрируема по Лебегу, $\xi(x,y) = \int_0^x r(t,y)\,dt$ определяет симметричную меру на $I \times I$ (т. е. $\xi(e \times g) = \xi(g \times e)$).

Другие обозначения:

- W^k ($k \geq 0$) – множество функций u, имеющих абсолютно непрерывную на $[0,l]$ производную $u^{(k)}$, $u^{(0)} = u$. Форму $\langle u,v\rangle$ рассматриваем в множестве функций из W^{m-1}, для которых $\int_0^l \left(u^{(m)}\right)^2 dx < \infty$.
- W_0 – множество функций из W^{m-1}, удовлетворяющих краевому условию (1), а также условию $[u,u] < \infty$, где

$$[u,v] := \int_0^l u^{(m)}v^{(m)}\,dx.$$

W_0 является гильбертовым пространством относительно $[u,v]$.

2. Результаты

Теорема 1. *Спектральная задача* $\mathcal{L}u = \lambda u$ *при краевых условиях* (1), (2) *имеет полную и ортогональную в* W_0 *и в* $L_2(0,l)$ *систему собственных функций* $\mathcal{L}u_k = \lambda_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$, $\lambda_k \to \infty$. *Для* λ, *отличного от собственных значений, краевая задача* $\mathcal{L}u - \lambda u = f$ *имеет единственное решение при любой* $f \in L_2(0,l)$.

Определим «урезанный» оператор $\mathcal{L}_\nu$ равенством

$$\mathcal{L}_\nu u := (-1)^m u^{(2m)} - \int_\nu^l u(s)r(x,ds),\ x \in [\nu,l], \tag{5}$$

и краевое условие

$$u^{(k)}(\nu) = 0,\ k = 0,\ldots,m-1. \tag{6}$$

Решение задачи $(-1)^m u^{(2m)} = z$, (1),(2), удовлетворяет при $z \geq 0$ условиям

$$u^{(k)} \geq 0\ (k = 0,\ldots,m-1),\ (-1)^{k-m}u^{(k)} \geq 0\ (k = m,\ldots,2m-1). \tag{7}$$

Следующее утверждение обобщает некоторые результаты из [2].

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Квадратичный функционал* $\langle u,u\rangle$ *положителен в множестве* W_0.
2. *При любом* $\nu \in [0,l)$ *«урезанная» краевая задача* $\mathcal{L}_\nu u = 0$, (6),(2), *имеет только нулевое решение.*

3. *Наименьшее собственное число* λ_0 *спектральной задачи* $\mathcal{L}u = \lambda u$ *при краевых условиях* (1),(2) *положительно.*
4. *Краевая задача* $\mathcal{L}u = f$, (1),(2), *однозначно разрешима, и ее решение положительно при любой неотрицательной ненулевой* f.
5. *Существует* $v \in W^{2m-1}$, *удовлетворяющая* (7), *дающая неотрицательную невязку* $\mathcal{L}v = \psi \geq\not\equiv 0$, *и удовлетворяющая условию* $u^{(2m-1)}(l) \neq 0$.

Утверждение о существовании неотрицательной функции v, дающей неотрицательную невязку составляет содержание так называемой теоремы Валле-Пуссена [3] о дифференциальном неравенстве. В данном случае – это частный случай теоремы, полученной в [1]. Использование конкретных пробных функций v позволяет получать эффективные оценки–условия положительности функционала (положительности первого собственного числа). Например, полагая $v(x) = (x+\varepsilon)^{m-0.5}$ ($\varepsilon > 0$), получим следующее достаточное условие положительности первого собственного числа:

$$\int_0^l (s+\varepsilon)^{m-0.5} d_s r(x,s) \leq \frac{((2m-1)!!)^2}{2^{2m}} (x+\varepsilon)^{-m-0.5}.$$

В частном случае, когда $\int_0^l u(s) d_s r(x,s) = p(x)u(x)$, получим оценку

$$p(x) \leq \frac{(2m-1)!!)^2}{2^{2m}(x+\varepsilon)^2},$$

которая при $m = 1$ совпадает с известной оценкой $p(x) \leq 1/(4(x+\varepsilon)^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабовский С.М.* О положительных решениях линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 4. С. 578-584.

2. *Labovskiy S.* On spectral problem and positive solutions of a linear singular functional-differential equation // Functional Differential Equations. 2013. Vol. 20. № 3-4. P. 179-200.

3. *Ch. J. de la Vallée-Poussin.* Sur l'equation differentielle lineare du second ordre // J. Math. Pures et Appl. 1929. Vol. 9. № 8. P. 125-144. JFM 55.0850.02.

Поступила в редакцию 22 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Алвеш Мануэль Жоаким, Университет им. Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, профессор кафедры математики, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

Лабовский Сергей Михайлович, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: labovski@gmail.com

Для цитирования: *Алвеш М.Ж., Лабовский С.М.* О спектральной задаче и положительных решениях для функционально-дифференциального уравнения четного порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 154–157. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157

ON THE SPECTRAL PROBLEM AND POSITIVE SOLUTIONS FOR A FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EVEN ORDER

M. J. Alves[1), **S. M. Labovskiy**[2)]

[1)] Eduardo Mondlane University
257 Praca 25 de Junho, Maputo CP 257, Mocambique
E-mail: mjalves.moz@gmail.com
[2)] Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny Lane, 36, Moscow 117997, Russian Federation
E-mail: labovski@gmail.com

Abstract. Basic properties of the system of eigenfunctions for even order functional differential equation under special boundary conditions are obtained. Equivalence of a serie of classical affirmations is established. Among them are the Vallee-Poussin affirmation and positivity of the corresponding quadratic functional.
Keywords: quadratic functional; Vallee-Poussin theorem; functional differential operator; spectrum

REFERENCES

1. Labovskiy S.M. O polozhitel'nykh resheniyakh lineynykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On positive solutions of rectilinear functional differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 578-584. (In Russian).

2. Labovskiy S. On spectral problem and positive solutions of a linear singular functional-differential equation. *Functional Differential Equations*, 2013, vol. 20, no. 3-4, pp. 179-200.

3. Ch. J. de la Vallée-Poussin. Sur l'equation differentielle lineare du second ordre. *J. Math. Pures et Appl.*, 1929, vol. 9, no. 8, pp. 125-144. JFM 55.0850.02. (In French).

Received 22 March 2018
Reviewed 25 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Alves Manuel Joaquim, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Ph. D., Full Professor of Mathematics Department, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

Labovskiy Sergey Mikhailovich, Plekhanov Russian University of Economics, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department, e-mail: labovski@gmail.com

For citation: Alves M. J., Labovskiy S.M. O spektralnoy zadache i polozhitelnyh resheniyah dlya funkcionalno-differencialnogo uravneniya chetnogo poryadka [On the spectral problem and positive solutions for a functional-differential equation of the even order]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 154–157. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157 (In Russian, Abstr. in Engl.).